

Πρόλογος

Η προσπάθεια αυτή έγινε από την Καραγιάννη - Μπαρδώση Γεωργία, η οποία γεννήθηκε στον Άγιο Αδριανό Ναυπλίου το 1949, όπου και κατοικεί τα τελευταία 30 χρόνια, ασκώντας το επάγγελμα τις αγρότισσας.

Αφιερώνεται

Στη μνήμη του 20χρόνου ΝΙΚΟΥ ΚΑΚΑΒΑ, που με το δικό του, ιδιαίτερο τρόπο, βοήθησε στην ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας.

1) Θεωρούμε την ακτίνα ίση με 1 Τότε, στο $\triangle \Gamma \hat{D} A$ ορθογώνιο έχω $A\Gamma=1$ $\hat{A}=\hat{\Gamma}=45^\circ$

$$\text{Άρα } A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 \Rightarrow A\Delta = \sqrt{0,5} \Rightarrow 0,7071067$$

$$\eta\mu.\hat{\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{0,7071067}{1} \Rightarrow \boxed{\eta\mu.45^\circ = 0,7071067}$$

2) Στο $\triangle Z \hat{A} E$ ορθογώνιο έχω $AE=1$ $ZE=0,5$ και $\hat{E}=60^\circ$

$$\text{Άρα } AE^2 = AZ^2 + ZE^2 \Rightarrow AZ = 0,8660254 \quad \eta\mu.\hat{E} = \frac{AZ}{AE} \Rightarrow \frac{0,8660254}{1} \Rightarrow \boxed{\eta\mu.60^\circ = 0,8660254}$$

$$\text{Στο ίδιο τρίγωνο έχω } \eta\mu.\hat{A} = \frac{ZE}{AE} = \frac{0,5}{1} = 0,5 \Rightarrow \boxed{\eta\mu.30^\circ = 0,5}$$

3) $AH=R$, $AZ=0,8660254$ Άρα $ZH=AH-AZ \Rightarrow 0,1339746$

Στο $\triangle \Gamma \hat{Z} H$ ορθογώνιο έχω $ZH=0,1339746$, $\Gamma Z=0,5$

$$\text{Άρα } \Gamma H^2 = \Gamma Z^2 + ZH^2 \Rightarrow \Gamma H = 0,517638$$

$$\text{Φέρω } A\Theta \text{ διχοτόμο της } \triangle \hat{A} H. \text{ Έχω } \Gamma\Theta = \Theta H \Rightarrow \frac{\Gamma H}{2} \Rightarrow 0,258819$$

$$\text{Στο } \triangle \hat{A} \Theta \text{ ορθογώνιο έχω } \eta\mu.\hat{A} = \frac{\Gamma\Theta}{A\Gamma} \Rightarrow \frac{0,258819}{1} = 0,258819$$

$$\boxed{\eta\mu.15^\circ = 0,258819}$$

$$\text{Στο ίδιο τρίγωνο έχω } A\Gamma^2 = \Gamma\Theta^2 + A\Theta^2 \Rightarrow A\Theta = 0,9659258$$

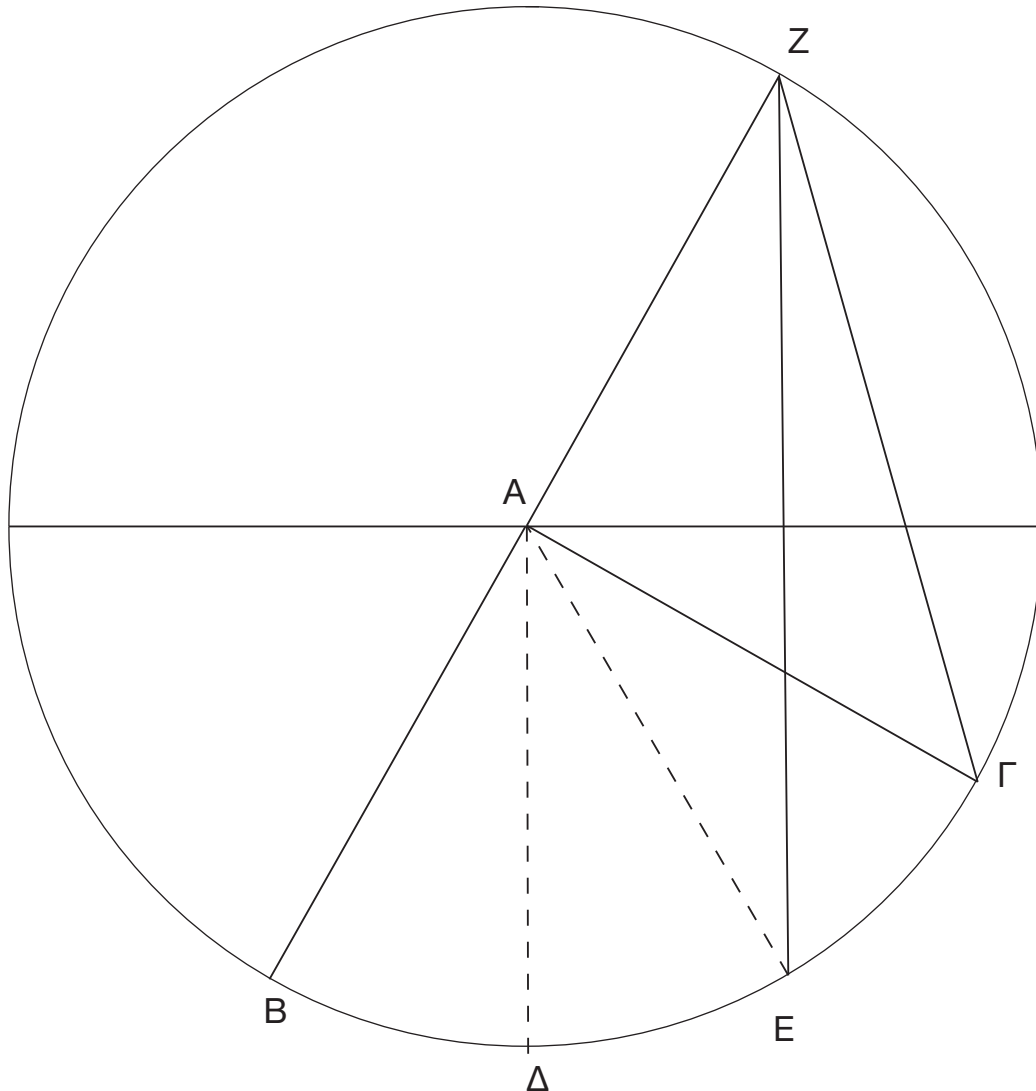
$$\eta\mu.\hat{\Gamma} = \frac{A\Theta}{A\Gamma} \Rightarrow \frac{0,9659258}{1} \Rightarrow 0,9659258$$

$$\boxed{\eta\mu.75^\circ = 0,9659258}$$

Τα παραπάνω θα θεωρηθούν περιττά, εφ' όσον είναι γνωστά. Αναφέρονται, όμως, για να επιβεβαιώσουν τον ισχυρισμό του προλόγου.

Η τριχοτόμηση της ορθής γωνίας, έμμεσα τριχοτομεί την οξεία γωνία των 45° .

Οποιαδήποτε αναφορά σε τριχοτόμηση γωνίας, δεν αφορά τη λύση ενός εκ των τριών “άλυτων προβλημάτων”, γιατί χρησιμοποιείται η Τριγωνομετρία, η οποία δεν υπήρχε την π.Χ. περίοδο.



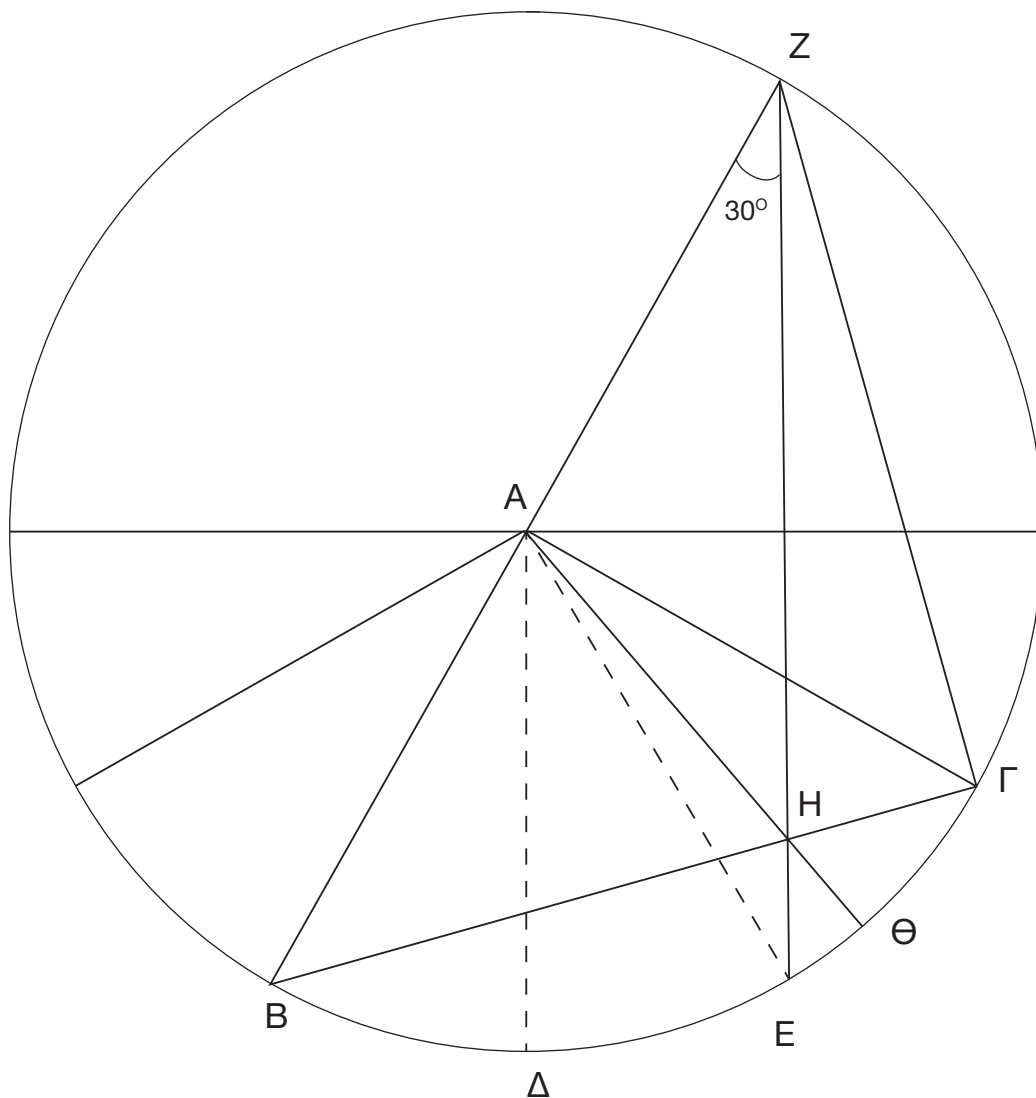
Τριχοτομώ την ορθή $\widehat{BA\Gamma}$, ορίζοντας σημεία Δ και Ε.

Ορίζω $\widehat{ZA\Gamma} = 90^\circ$ Άρα $\widehat{AZ\Gamma} = \widehat{Z\Gamma A} = 45^\circ$ Φέρω ΖΕ

Η $\widehat{EZ\Gamma}$ εγγεγραμ. του κύκλου Α(Ρ) βαίνει σε τόξο επίκεντρης $\widehat{EA\Gamma} = 30^\circ$

Άρα $\widehat{EZ\Gamma} = 15^\circ = \frac{1}{3} \widehat{AZ\Gamma}$

Η ΖΕ παίζει καθοριστικό ρόλο, στην παραπέρα προσπάθεια. Με βάση τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας “ακριβή” ημίτονα (τα του προλόγου), θα προσπαθήσω να τριχοτομήσω τις γωνίες 60° , 30° , 15° , με σκοπό την εύρεση ακριβέστερων ημιτόνων, για περισσότερες γωνίες.



Στο σχήμα της σελ. 3 φέρω ΒΓ, η οποία τέμνει την ΕΖ στο σημείο Η. Φέρω ΑΗ, η οποία τέμνει τον κύκλο Α(Ρ) στο σημείο Θ. Θεωρώ ότι:

$$\widehat{\Theta\Lambda\Gamma} = \frac{1}{3} \widehat{\Delta\Lambda\Gamma} = 20^\circ \quad \text{και} \quad \widehat{E\Lambda\Theta} = \frac{1}{3} \widehat{E\Lambda\Gamma} = 10^\circ$$

Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει η $\widehat{\Theta\Lambda Z} = 110^\circ$ Εφόσον εξ ορισμού έχω $\widehat{\Gamma\Lambda Z} = 90^\circ$

Στο σχήμα της σελ 4 έχω $\hat{BHZ}$ και $\hat{HAZ}$

Στο $\hat{BHZ}$ έχω $\hat{B}=45^\circ$, $\hat{Z}=30^\circ$ (ακριβή ημίτονα)

Άρα $\hat{H}=105^\circ$ και $BZ=2R$

$$\text{Επομένως } \frac{\eta\mu.\hat{B}}{HZ} = \frac{\eta\mu.\hat{H}}{BZ} \Rightarrow \frac{0,7071067}{HZ} = \frac{0,9659258}{2R}$$

$$\Rightarrow HZ=1,4641014R$$

Στο $\hat{HAZ}$ έχω $AZ=R$, $HZ=1,4641014R$ και $\hat{Z}=30^\circ$

$$\text{Επομένως } AH^2 = AZ^2 + ZH^2 - 2AZ \cdot ZH \cdot \text{συν}.\hat{Z} \Rightarrow AH=0,7795478R$$

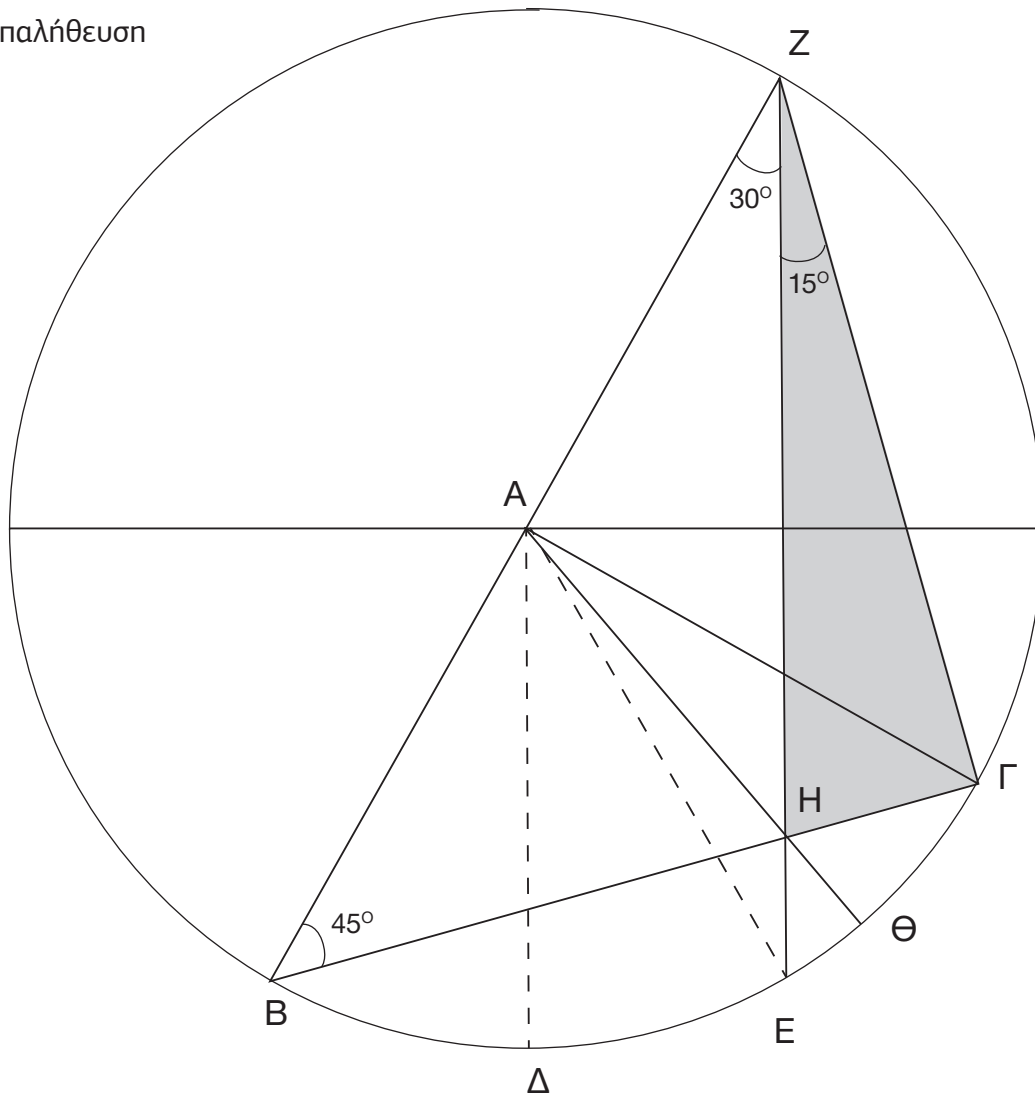
$$\text{Στο } \hat{HAZ} \text{ έχω } \frac{\eta\mu.\hat{HAZ}}{ZH} = \frac{\eta\mu.\hat{AZH}}{AH} \Rightarrow \frac{\eta\mu.\hat{HAZ}}{1,4641014} = \frac{0,5}{0,7795478} \Rightarrow$$

$$\eta\mu.\hat{HAZ}=0,9390709$$

Για να έχει τριχοτομηθεί η γωνία $\hat{\Delta\hat{A}\hat{\Gamma}}=60^\circ$, πρέπει η $HAZ=110^\circ$ $\eta\mu.110^\circ=\eta\mu.70^\circ$

Θεωρώ ότι $\eta\mu.70^\circ=0,9390709$ (όχι 0,9397 του πίνακα) διότι η HZ, όπως θ'αποδειχθεί παρακάτω επαληθεύει τα ακριβή ημίτονα των 15° και 75°

Επαλήθευση



Έχω $\hat{\Gamma H Z}$ ορθογώνιο όπου $\hat{Z}=15^\circ$ (εγγεγραμμένη), $\hat{\Gamma}=90^\circ$

και $\hat{H}=75^\circ$. Επίσης $Z\Gamma=1,4142135R$, $HZ=1,4641014R$ (σελ. 5)

Επομένως $HZ^2=Z\Gamma^2+H\Gamma^2 \Rightarrow H\Gamma=0,3789365R$

Στο ίδιο τρίγωνο έχω $\eta\mu.\hat{Z}=\frac{H\Gamma}{ZH}=\frac{0,3789365}{1,4641014} \Rightarrow \eta\mu.\hat{Z}=0,2588184=\eta\mu.15^\circ$

$\eta\mu.\hat{H}=\frac{Z\Gamma}{ZH}=\frac{1,4142135}{1,4641014} \Rightarrow 0,9659259=\eta\mu.75^\circ$

Μετά την επαλήθευση συμπεραίνω ότι:

$$\hat{\Theta A \Gamma}=20^\circ = \frac{1}{3} \hat{\Delta A \Gamma} \text{ και } \hat{E A \Theta}=10^\circ = \frac{1}{3} \hat{E A \Gamma}$$

Σημ: Αν δεχτούμε το $\eta\mu.70^\circ=0,9397$ του Τριγωνομετρικού Πίνακα,
στην επαλήθευση το $\eta\mu.15^\circ=0,2586$

Γιαυτό **ΘΕΩΡΩ ΣΩΣΤΟ** $\eta\mu.70^\circ=0,9390709$

Η τριχοτόμηση της γωνίας των 90° και κατ' επέκταση των 45° , μας δίνει ακριβή ημίτονα ανά 15° .

Η τριχοτόμηση τως γωνίας των 60° και κατ' επέκταση των 30° και 15° , μας δίνει την δυνατότητα να χωρίσουμε το κύκλο $A(R)$ ανά 5° .

Μπορούμε έτσι να βρούμε τα ημίτονα των γωνιών ανά 5° , **βασιζόμενοι στα μεγέθη των ευθυγράμμων τμημάτων, που προκύπτουν, από το σχήμα** (σελ.6)

Τα μεγέθη αυτά είναι:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $AH=0,7795478R$ | 2) $H\theta=0,2204522R$ |
| 3) $H\Gamma=0,3789365R$ | 4) $BH=1,035277R$ |
| 5) $ZH=1.4641014$ | |

Τα μεγέθη αυτά δεν μπορούν να αμφισβητηθούν, διότι επαληθεύουν τα ημίτονα των 15° και 75° .

Ακολουθεί Γεωμετρική παράσταση, των ημιτόνων ανά 5° (σε ζεύγη) με βάση το σχήμα της σελίδας 6.

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) ημ. 20° , 70° | 2) ημ. 10° , 80° - 5° , 85° |
| 3) ημ. 25° , 65° | 4) ημ. 40° , 50° |
| 5) ημ. 35° , 55° | |

Δεν αναφέρονται παρακάτω τα γνωστά ημίτονα της σελ. 1

A geometric diagram showing a circle with a horizontal diameter. Point A is on the diameter. A vertical line segment ZE passes through A, with Z on the upper arc and E on the lower arc. A line segment BΓ is drawn, with B on the lower arc and Γ on the upper arc. Point H is the intersection of AΓ and BE. A shaded triangle AHI is formed, with vertex I on the lower arc. Angle BAH is labeled 20. Angle IHE is labeled θ. An arc Δ is shown below the circle, centered at A, passing through B and intersecting the extension of AΓ at a point.

Δημιουργείται έτσι το $\Gamma\overset{\Delta}{\Lambda}$ ορθογώνιο, όπου $A\Gamma=R$

$AI = 0,9390709R$ (σελ.6). Επομένως $AI^2 = AI^2 + I\Gamma^2 \Rightarrow I\Gamma = 0,3437235R$

Στο ΓΙΑ ορθογώνιο έχω $\eta\mu.\hat{\Gamma A \Gamma} = \frac{\Gamma \Gamma}{A \Gamma} = \frac{0,3437235}{1} \Rightarrow \eta\mu.20^\circ = 0,3437235$

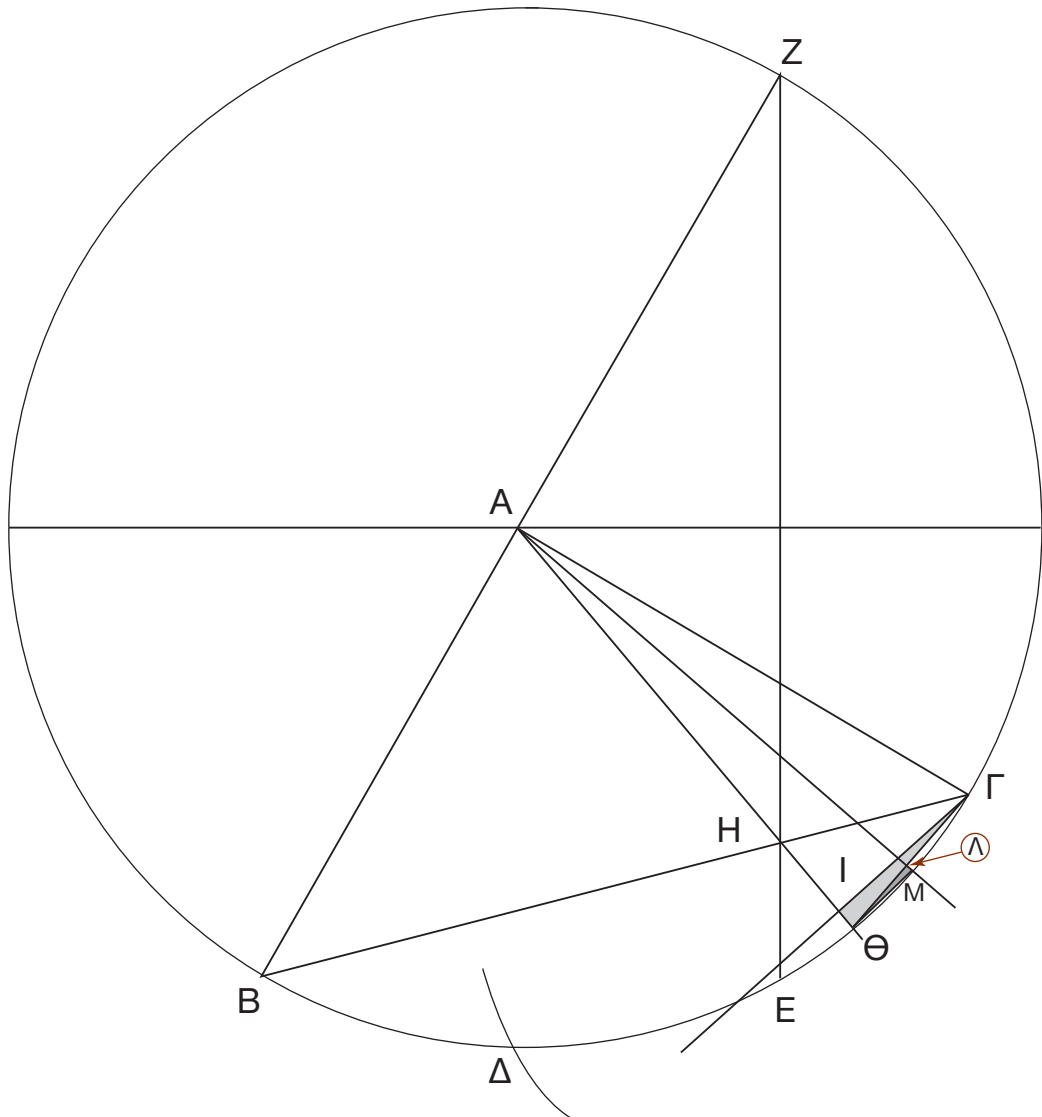
8

ημ.10°, 80°

5°, 85°

$\hat{\theta\Lambda\Gamma} = 20^\circ$ (σελ. 6)

Ορίζω $\hat{\theta\Lambda M} = \hat{M\Lambda\Gamma} \Rightarrow \frac{1}{2} \hat{\theta\Lambda\Gamma} \Rightarrow 10^\circ$



Από σελ.8 έχω $AI = 0,9390709R$ Άρα $I\Theta = A\Theta - AI \Rightarrow 0,0609291R$

και $I\Gamma = 0,3437235R$ (ημ.20°). Στο $\triangle I\Theta\Gamma$ ορθογώνιο έχω $\Gamma\Theta^2 = \Gamma I^2 + I\Theta^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma\Theta = 0,3490817R$ $\theta\Lambda = \Gamma\Lambda \Rightarrow \frac{\Gamma\Theta}{2} \Rightarrow 0,1745408R$

Στο $\triangle \theta\Lambda\Lambda$ ορθογώνιο έχω $\eta\mu.\hat{\theta\Lambda\Lambda} = \frac{\theta\Lambda}{A\Theta} \Rightarrow \frac{0,1745408}{1} \Rightarrow 0,1745408$

$\eta\mu.\hat{\theta\Lambda\Lambda} = 0,1745408 = \eta\mu.10^\circ$

Στο ίδιο ορθογώνιο έχω $A\theta^2 = A\lambda^2 + \theta\lambda^2 \Rightarrow A\lambda = 0,9846499R$

$$\eta\mu.\hat{\Lambda\theta A} = \frac{A\lambda}{A\theta} \Rightarrow \frac{0,9846499}{1} \Rightarrow \boxed{0,9846499 = \eta\mu.80^\circ}$$

Στο σχήμα της σελ. 9 έχω $\Lambda M = AM - A\lambda \Rightarrow \Lambda M = 0,0153501R$

Στο $\triangle \theta \Lambda M$ ορθογώνιο έχω $\theta\lambda = 0,1745408R$ σελ. 9

Άρα $\theta M^2 = \theta\lambda^2 + \Lambda M^2 \Rightarrow \theta M = 0,1752141R$

$$\eta\mu.\hat{\Lambda\theta M} = \frac{\Lambda M}{\theta M} = \frac{0,0153501}{0,1752141} \Rightarrow 0,0876076$$

$AM \perp \theta\Gamma$ εξορισμού (σελ. 9)

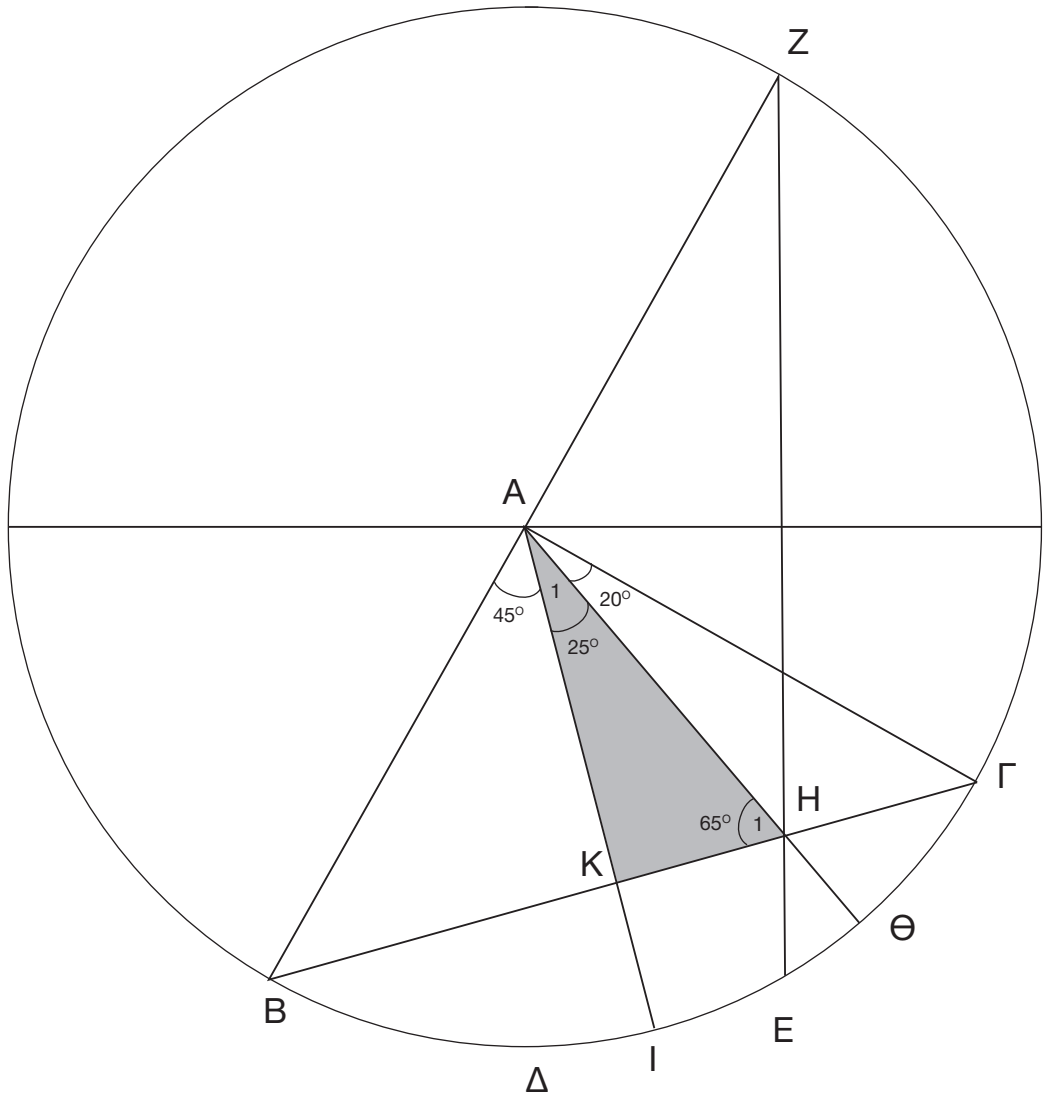
Στο $\triangle M\hat{A}\theta$ έχω $\theta\hat{A}M = 10^\circ$ Άρα $M\hat{\theta}A = \theta\hat{M}A = 85^\circ$

Επειδή $\Lambda\hat{\theta}A = 80^\circ$ έχω $\Lambda\hat{\theta}M = 5^\circ$

$$\eta\mu.\hat{\Lambda\theta M} = \frac{\Lambda M}{\theta M} = \boxed{0,0876076 = \eta\mu.5^\circ}$$

$$\eta\mu.\hat{\theta M \Lambda} = \frac{\theta\lambda}{\theta M} \Rightarrow \frac{0,1745408}{0,1752141} \Rightarrow \boxed{0,9961572 = \eta\mu.85^\circ}$$

ημ.25°, 65°



Φέρω AI (δικοτόμο της $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ ορθής)

Δημιουργείται το $\hat{AKH}$ ορθογώνιο όπου $\hat{K}=90^\circ$, $\hat{A}_1=25^\circ$

Άρα $\hat{H}_1 = 65^\circ$ και $AH = 0,7795478R$, $AK = 0,7071067R$

Επομένως $AH^2 = AK^2 + KH^2 \Rightarrow KH = 0,328169$

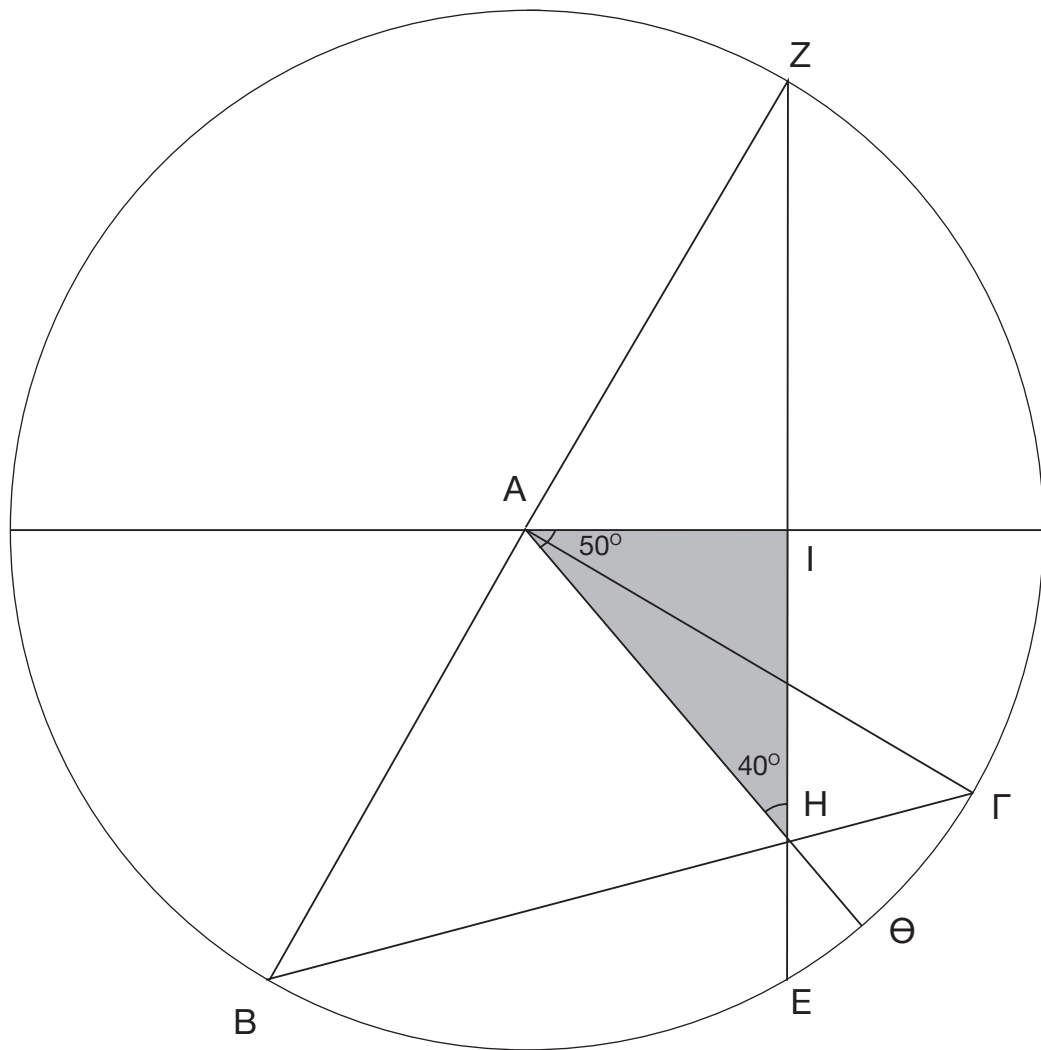
Άρα $n_{\mu.\hat{A}_1} = \frac{KH}{AH} \Rightarrow 0,4209735$

$$n_{\mu.25^{\circ}} = 0,4209735$$

$$\text{και } \hat{n}_{\mu.H_1} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow 0,9070729$$

$$n_{\mu.65^{\circ}} = 0,9070729$$

ημ.40°, 50°



Στο $\hat{HAI}$ ορθογώνιο έχω $\hat{A}=50^\circ, \hat{I}=90^\circ$ εξ'ορισμού

Άρα $\hat{H}=40^\circ, AI=0,5 \quad IH=ZH-ZI \Rightarrow 1,4641014R-0,8660254 \Rightarrow$

$\Rightarrow IH=0,598076R$ και $AH= 0,7795478R$

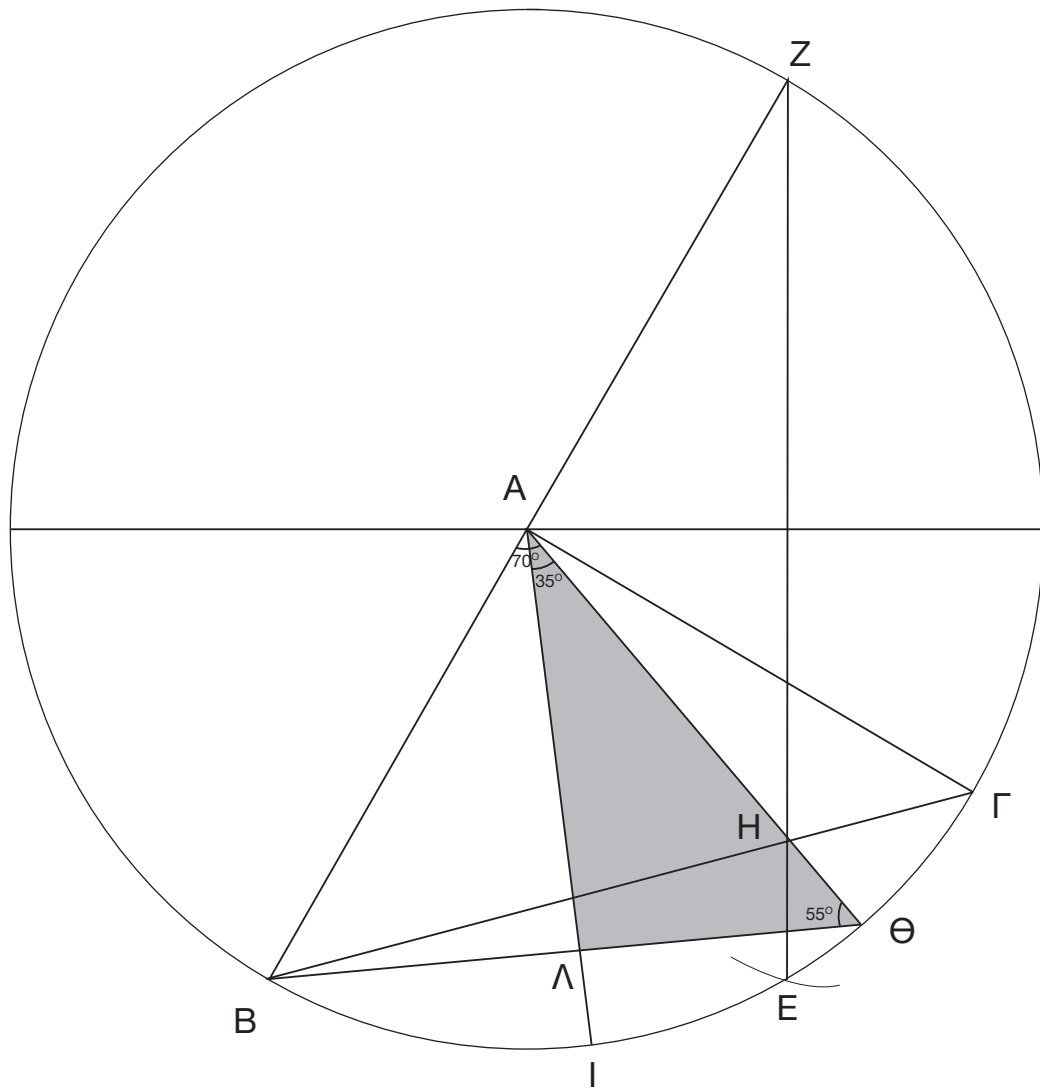
Άρα $\eta\mu.\hat{A} = \frac{IH}{AH} \Rightarrow \frac{0,598076}{0,7795478} \Rightarrow 0,7672088$

$\eta\mu.50^\circ = 0,7672088$

και $\eta\mu.\hat{H} = \frac{AI}{AH} \Rightarrow \frac{0,5}{0,7795478} \Rightarrow 0,6413974$

$\eta\mu.40^\circ = 0,6413974$

ημ.35°, 55°



Φέρω ΒΘ. Δημιουργείται το $\widehat{B\hat{A}O}$, όπου $AB=AO=R$

$$\hat{A}=70^\circ, \hat{B}=\hat{\Theta}=55^\circ. \text{ Επομένως } B\hat{\Theta}^2=AB^2+A\Theta^2-2AB\cdot A\Theta\cdot \text{συν.}\hat{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\theta = 1,145667R$$

Φέρω τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}\hat{A}\hat{\Theta}$, τέμνει την $B\Theta$ στο σημείο Λ .

Δημιουργείται το $\Delta \Lambda \Theta$ ορθογώνιο, όπου $\Lambda\Theta=R$ και $\Lambda\Theta=\frac{B\Theta}{2}=0,5728335R$

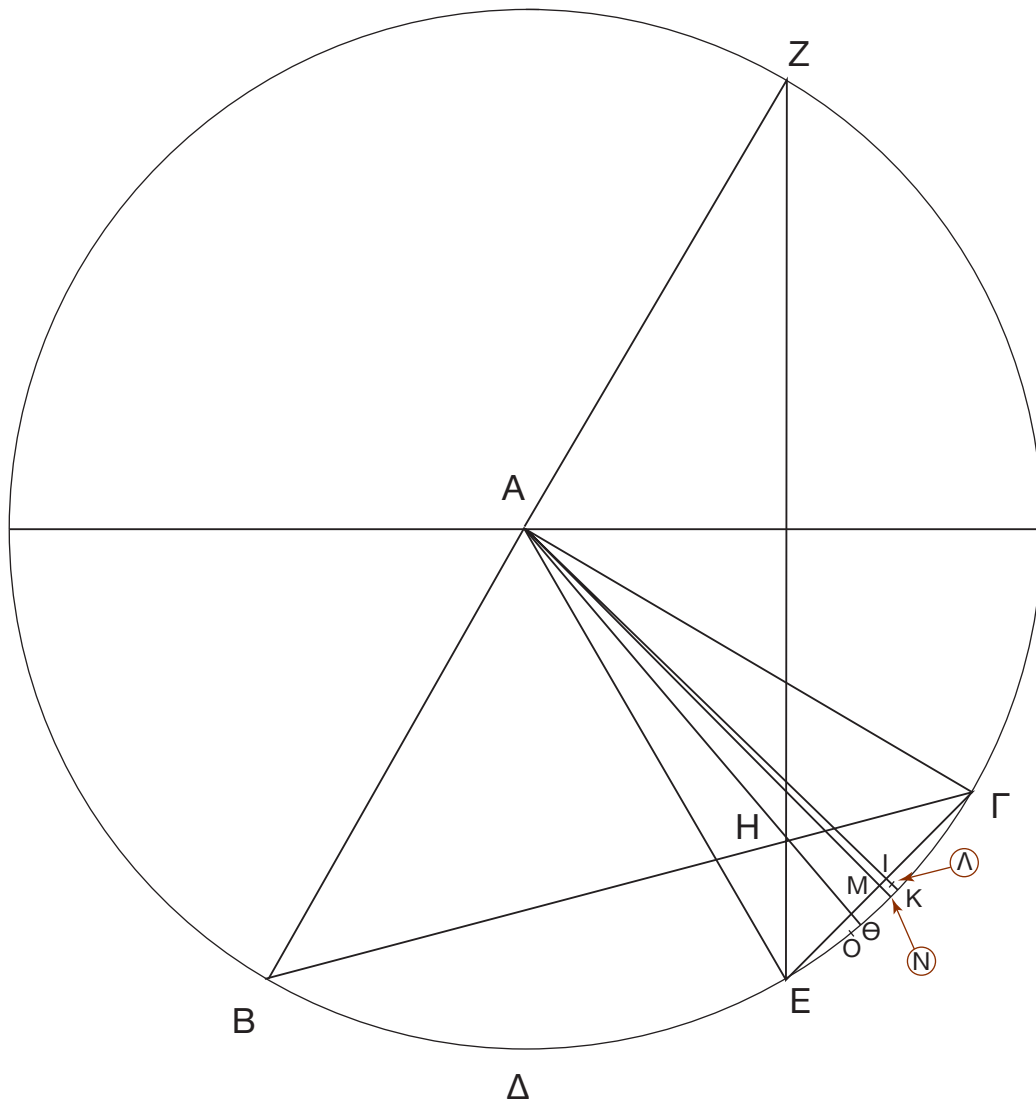
Επομένως $A\Theta^2 = \Lambda\Theta^2 + A\Lambda^2 \Rightarrow A\Lambda = 0,8196717R$

$$\text{Άρα } \eta_{\mu.\hat{\Lambda}\Theta} = \frac{\Lambda\Theta}{\Lambda\Theta} = 0,5728335$$

$$n_{\mu.35^{\circ}}=0,5728335$$

$$n_{\mu} \cdot \hat{\Lambda}_{\Theta A} = \frac{A \Lambda}{A \Theta} = 0,8196717$$

$$n_{\mu.55^\circ}=0,8196717$$



Στο σχήμα της σελ. 4 ορίζω $\widehat{E\hat{A}K} = \widehat{K\hat{A}\Gamma} = 15^\circ$ Άρα $\widehat{\Theta\hat{A}K} = 5^\circ$ (Εφ' όσον $\widehat{E\hat{A}\Theta} = 10^\circ$)

$AI = \eta\mu.75^\circ \Rightarrow 0,9659258R$ Άρα $IK = AK - AI \Rightarrow 0,0340742R$

ορίζω $IL = \lambda K = \frac{IK}{2} \Rightarrow IL = 0,0170371R$ Ορίζω $IM = IL$

Φέρω AM η οποία τέμνει το κύκλο $A(R)$ στο σημείο N .

Δημιουργείται επίσης το $\widehat{M\hat{A}I}$ ορθογώνιο, όπου $AI = 0,9659258R$

και $IM = 0,0170371R$, άρα $AM^2 = AI^2 + IM^2 \Rightarrow AM = 0,9660759R$

$\eta\mu.\widehat{M\hat{A}I} = \frac{IM}{AM} \Rightarrow 0,0176353$ θεωρώ ότι $\widehat{M\hat{A}I} = 1^\circ$, επομένως

$\widehat{\Theta\hat{A}N} = 4^\circ$ Χωρίζοντας την $\widehat{\Theta\hat{A}N}$ σε 4 ίσα μέρη έχω την $\widehat{\Theta\hat{A}K}$ χωρισμένη ανά 1° .

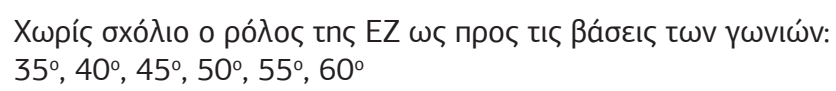
Με κέντρο N και ακτίνα ΘK ορίζω σημείο O . Έτσι προχωρώντας ανά μια μοίρα,

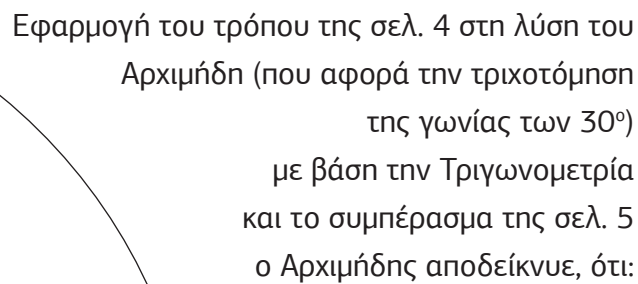
όπως οι δείκτες του ρολογιού και κρατώντας σταθερή ακτίνα $= \Theta K$, χωρίζω τον κύκλο $A(R)$ ανά 1°

ΥΓ Μπορεί να θεωρηθεί το σημείο N , ως σημείο μηδέν του κύκλου $A(R)$;

Ακριβή ημίτονα ανά 5°

ΓΩΝΙΑ	ΗΜΙΤΟΝΟ
5°	0,0876076
10°	0,1745408
15°	0,258819
20°	0,3437235
25°	0,4209735
30°	0,5
35°	0,5728335
40°	0,6413974
45°	0,7071067
50°	0,7672088
55°	0,8196717
60°	0,8660254
65°	0,9070729
70°	0,9390709
75°	0,9659258
80°	0,9846499
85°	0,9961572

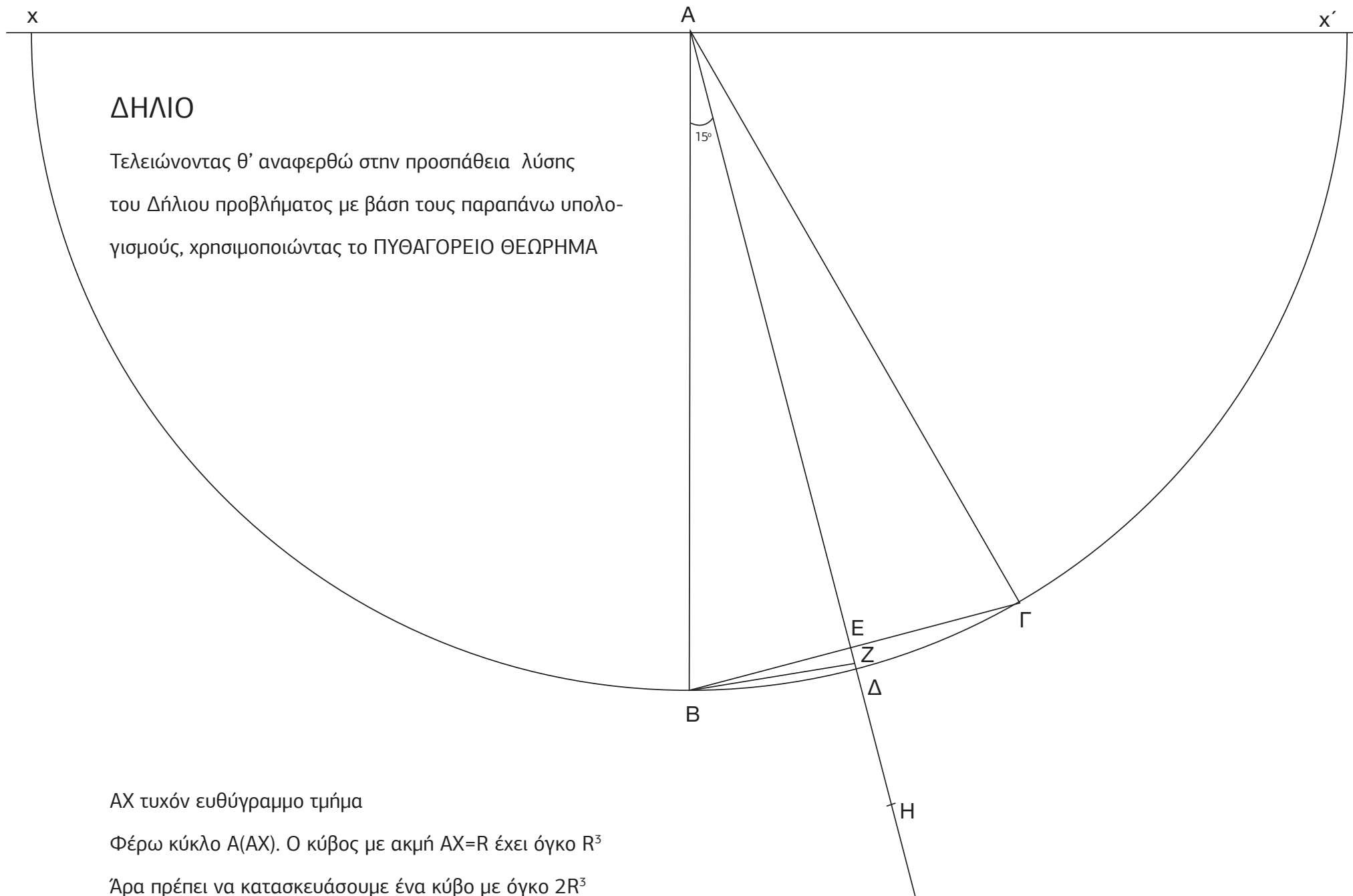




$$\hat{K} = \frac{1}{3} \hat{\Gamma}_2 \quad \text{εφ' όσον } \Lambda K = R$$

Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Επομένως $\Gamma\Lambda = \Lambda\text{K} = \text{R}$

17



Ορίζω $\hat{B\hat{A}D}=15^\circ$ Στο $B\hat{A}E$ ορθογώνιο έχω $BE=0,258819R$ και $AE=0,9659258R$

(ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ σελ. 2)

Άρα $ED=AD-AE \Rightarrow ED=0,0340742R$

Χωρίζω την ED σε τέσσερα ίσα μέρη. $\frac{ED}{4} = 0,0085185R$

Ορίζω $EZ=\frac{3}{4} ED \Rightarrow EZ=0,0255555R$

Φέρω BZ . Δημιουργείται το $B\hat{E}Z$ ορθογώνιο, όπου

$BE=0,258819R$ και $EZ=0,0255555R$. Επομένως

$BZ^2=BE^2+EZ^2 \Rightarrow BZ=0,2600772R$ ($AD=R$)

Ορίζω $\Delta H=BZ$ Άρα $AH=AD+\Delta H \Rightarrow AH=1,2600772R$

Ο κύβος με ακμή AH έχει όγκο $AH^3=2,0007436R^3$

Το 430 π.Χ., πιστεύω, ότι δεν απασχολούσε τους κατοίκους της Δήλου η διαφορά των επτά δεκάκις χιλιοστών.

Όσον αφορά την κατασκευή του διπλάσιου σε όγκο βωμού, αρκεί να έπαιρναν σαν ακτίνα του κύκλου την ακμή του υπάρχοντος βωμού.